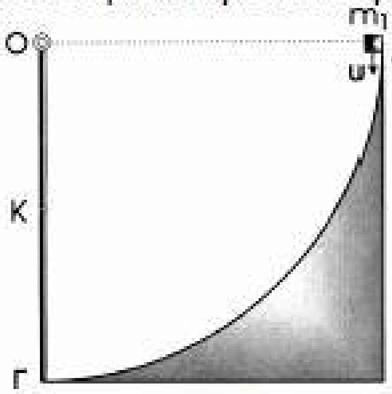
Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου.

ΘΕΜΑ

Σώμα αμελητέων διαστάσεων, μάζας $m_1=2kg$ εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon=2\sqrt{2}m/s$, όπως δείχνει το σχήμα 1, κατά μήκος λείου τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R=0,4m$. Στη βάση του τεταρτοκυκλίου το σώμα συγκρούεται με κατακόρυφη ράβδο μήκους $l=0,4m$ και μάζας $m_2=3kg$. Η ράβδος είναι ομογενής και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της Ο το οποίο συμπίπτει με το κέντρο του τεταρτοκυκλίου.



Σχήμα 1

Στο ελάχιστο χρονικό διάστημα που διαρκεί η σύγκρουση, το σώμα αποδίδει στη ράβδο το 50% της κινητικής ενέργειας που αυτό είχε ακριβώς πριν τη σύγκρουση. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά τη σύγκρουσής της με το σώμα.

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος αμέσως μετά την σύγκρουσή του με τη ράβδο.

γ) Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης.

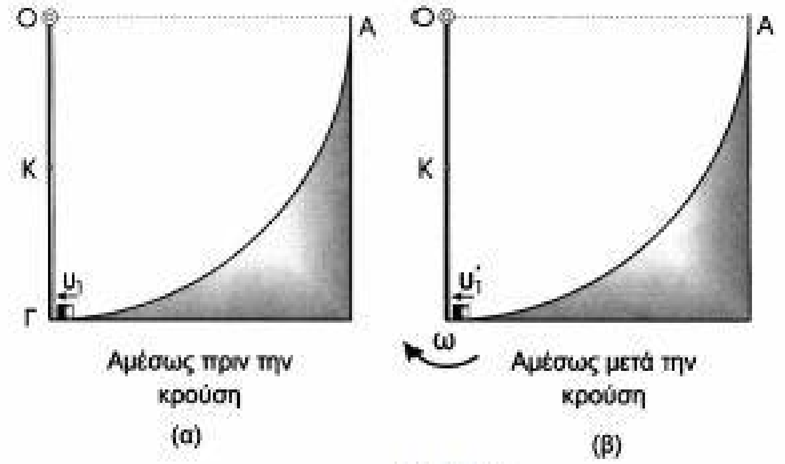
δ) Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της τη στιγμή κατά την οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο.

ε) Το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη του βάρους αφαιρεί ενέργεια από τη ράβδο τη στιγμή κατά την οποία η ράβδος σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I=\frac{1}{12}m_2 l^2$ και η επιτάχυνση βαρύτητας είναι $g=10m/s^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΘΕΜΑ

α) Το σώμα μάζας m_1, κατά τη μετατόπισή του από τη θέση Α στη θέση Γ (βλ. σχήμα 2α), δέχεται τις εξής δυνάμεις: το βάρος του $m_1\vec{g}$ και την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ του τεταρτοκυκλίου.



Σχήμα 2

Επειδή το έργο της αντίδρασης $\vec{N}$ ισούται με μηδέν και το βάρος είναι συντηρητική δύναμη, η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται. Έτσι έχουμε:

$E_{M(αρχ.)}=E_{M(τελ.)}$ ή $K_{(αρχ.)}+U_{(αρχ.)}=K_{(τελ.)}+U_{(τελ.)}$ ή, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη κατώτερη θέση του σώματος,

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon^2+m_1gR=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+0 \quad ή \quad \upsilon_1=\sqrt{\upsilon^2+2gR}$$

όπου $\vec{\upsilon}_1$ η ταχύτητα του σώματος ακριβώς πριν τη σύγκρουσή του με τη ράβδο, όπως δείχνει το σχήμα 2α. Με αντικατάσταση των τιμών παίρνουμε $\upsilon_1=4m/s$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Steiner, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$I_{(0)}=I_{cm}+m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{12}m_2l^2+\frac{1}{4}m_2l^2=\frac{1}{3}m_2l^2$$

ή $I_{(0)}=0,16\ kg\cdot m^2$

Έστω $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά τη σύγκρουσή της με το σώμα. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το σώμα αποδίδει το 50% της κινητικής ενέργειάς του στη ράβδο, οπότε είναι:

$$K_{(ραβ.)}=\frac{50}{100}K_{(σωμ.)} \quad ή \quad \frac{1}{2}I_{(0)}\omega^2=0,5\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$$

$$ή \quad \omega=\upsilon_1\sqrt{\frac{0,5m_1}{I_{(0)}}} \quad ή \quad \omega=10\ r/s$$

β) Κατά την αμελητέα χρονική διάρκεια της κρούσης, οι φορείς: του βάρους $m_2\vec{g}$ της ράβδου, της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στη ράβδο από τον άξονα περιστροφής και του βάρους $m_1\vec{g}$ του σώματος διέρχονται από τον άξονα περιστροφής. Επομένως, στο σύστημα ράβδος-σώμα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής και η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Έχουμε: $L_{(πριν)}=L_{(μετά)}$ ή $m_1\upsilon_1\ell=I_{(0)}\omega+m_1\upsilon'_1\ell$

όπου $\vec{\upsilon}_1'$ η ταχύτητα του σώματος μετά την κρούση. Λύνουμε την προηγούμενη σχέση ως προς υ_1' και με αντικατάσταση των τιμών παίρνουμε:

$$\upsilon_1'=\upsilon_1-\frac{I_{(0)}\omega}{m_1l} \quad ή \quad \upsilon_1'=2m/s$$

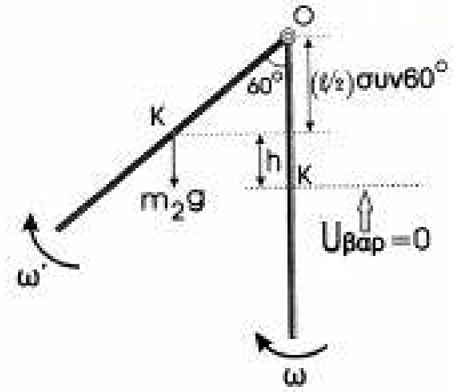
γ) Επειδή κατά την κρούση δεν μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια των σωμάτων του συστήματος, η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος ισούται με την ελάττωση της κινητικής ενέργειάς του. Δηλαδή:

$$E_{απ}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2-\left(\frac{1}{2}I_{(0)}\omega^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2\right) \quad ή \quad E_{απ}=4J$$

δ) Όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο (βλ. σχήμα 3), ο ζητούμενος ρυθμός είναι:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau_{(0)}=-m_2g\frac{l}{2}ημ60°=-\frac{m_2gl\sqrt{3}}{4} \quad ή$$

μετά την αντικατάσταση των τιμών, $\frac{dL}{dt}=-3\sqrt{3}\ kgm^2s^{-2}$



Σχήμα 3

ε) Το κέντρο Κ της ράβδου, τη στιγμή κατά την οποία αυτή σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία 60°, βρίσκεται υψηλότερα σχετικά με την αρχική θέση του (βλ. σχήμα 3) κατά

$$h=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}συν60°=\frac{l}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{l}{4} \quad ή \quad h=0,1m$$

Έστω $\vec{\omega}'$ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν αυτή σχηματίζει γωνία 60° με την κατακόρυφο. Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ της ράβδου όταν αυτή βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση. Η μηχανική ενέργεια της ράβδου διατηρείται, οπότε:

$E_{M(αρχ.)}=E_{M(τελ.)}$ ή $K_{(αρχ.)}+U_{(αρχ.)}=K_{(τελ.)}+U_{(τελ.)}$ ή

$$\frac{1}{2}I_{(0)}\omega^2+0=\frac{1}{2}I_{(0)}\omega'^2+m_2gh \quad ή$$

$$\omega'=\sqrt{\omega^2-\frac{2m_2gh}{I_{(0)}}} \quad ή \quad \omega'=5\sqrt{2,5}\ r/s$$

ι) Ο ζητούμενος ρυθμός είναι:

$$\frac{dW}{dt}=\tau_{B(0)}\omega'=m_2g\frac{l}{2}ημ60°\omega'=\frac{\sqrt{3}m_2gl}{4}\omega' \quad ή$$

$$\frac{dW}{dt}=15\sqrt{7,5}\ J/s$$