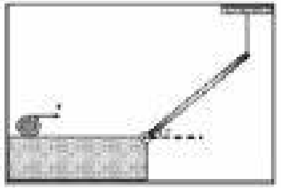
Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου.

**> ΑΣΚΗΣΗ:**



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας ομογενής κύλινδρος μάζας $m_1=2kg$, γύρω απ'τον οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα.
Αρχικά ο κύλινδρος είναι ακίνητος.
Τη χρονική στιγμή $t=0$ ασκούμε στο ελεύθερο άκρο του νήματος οριζόντια δύναμη $F=6N$, οπότε ο κύλινδρος ξεκινά να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t=t_1$ αφού έχει διανύσει διάστημα $S=8m$ παύει να ασκείται η δύναμη F, ενώ ο κύλινδρος με την ταχύτητα που απέκτησε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε δοκό, η οποία σχηματίζει γωνία $\varphi=30°$ με τον ορίζοντα και ισορροπεί με την βοήθεια κατακόρυφου νήματος. Η δοκός έχει μάζα $m=4kg$ και μήκος $L=10m$, ενώ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο που σχηματίζουν η δοκός και το νήμα.

*Να υπολογίσετε:* **1. α.** Την κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t=t_1$ που παύει να ασκείται η δύναμη F.

**β.** Την ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και οριζόντιου επιπέδου ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

**γ.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

**2.** Δείξτε ότι καθώς ο κύλινδρος ανεβαίνει στη δοκό, το νήμα θα σπάσει, αν γνωρίζετε ότι το όριο θραύσεως του νήματος είναι $T_{θρ}=30N$.

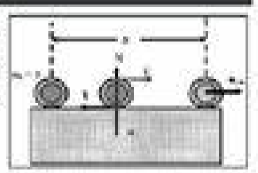
**3.** Αφότου σπάσει το νήμα να υπολογίσετε:

**α.** Τη γωνιακή ταχύτητα της δοκού και την ταχύτητα του κέντρου μάζας της τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση για πρώτη φορά.

**β.** Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της δοκού τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση για πρώτη φορά.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_{cm}=\frac{1}{2}m_1R^2$, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της $I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$. Κατά την αλλαγή της διεύθυνσης κίνησης του κυλίνδρου δεν μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια.

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ



**1. α.** Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση. Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$\Sigma\vec{F}=m_1\vec{a}_{cm} \rightarrow F-T=m_1a_{cm}$ (1)

Από το θεμελιώδη νόμο για την περιστροφική κίνηση έχουμε:

$\Sigma\tau_{(K)}=I_{cm}a_\gamma \rightarrow FR+TR=\frac{1}{2}m_1R^2a_\gamma \rightarrow F+T=\frac{1}{2}m_1Ra_\gamma$ (2)

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $a_{cm}=a_\gamma R$ (3)

Η σχέση (2) λόγω της σχέσης (3), γίνεται: $F+T=\frac{1}{2}m_1a_{cm}$ (4)

Προσθέτοντας τις (1) και (4) κατά μέλη παίρνουμε:

$$2F=\frac{3}{2}m_1a_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{4F}{3m_1} \rightarrow a_{cm}=4m/s^2$$

Η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε ισχύει:

$$S=\frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 \rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2S}{a_{cm}}} \rightarrow t_1=2s$$

$$u_{cm}=a_{cm}t_1 \rightarrow \mathbf{u_{cm}=8m/s}$$

Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1$ είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω της μεταφορικής του κίνησης και της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφικής του κίνησης, δηλαδή είναι:

$$K=K_{μετ}+K_{περ}=\frac{1}{2}m_1u_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2=\frac{1}{2}m_1u_{cm}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_1R^2\omega^2=$$

$$=\frac{1}{2}m_1u_{cm}^2+\frac{1}{4}m_1(\omega R)^2$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $u_{cm}=\omega R$.

Άρα $K=\frac{1}{2}m_1u_{cm}^2+\frac{1}{4}m_1u_{cm}^2 \rightarrow K=\frac{3}{4}m_1u_{cm}^2 \rightarrow K=96J$

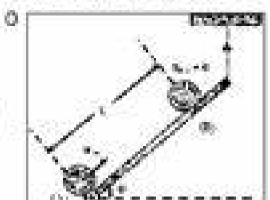
**β.** Για να μην ολισθαίνει ο κύλινδρος θα πρέπει η τριβή ανάμεσα σε αυτόν και το οριζόντιο επίπεδο να είναι στατική δηλαδή να ισχύει: $T<T_{στ(max)} \rightarrow T<\mu N$ όπου μ ο συντελεστής οριακής τριβής ανάμεσα στον κύλινδρο και το οριζόντιο επίπεδο.
Από τη σχέση (1) παίρνουμε: $T=F-m_1a_{cm} \rightarrow T=-2N$. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η δύναμη της στατικής τριβής έχει αντίθετη φορά από αυτή που σημειώσαμε στο σχήμα και μέτρο $T=2N$.

Όμως $N=m_1g$ άρα $T<\mu m_1g \rightarrow \mu>\frac{T}{m_1g} \rightarrow \mathbf{\mu>0,1.}$

**γ.** Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι:

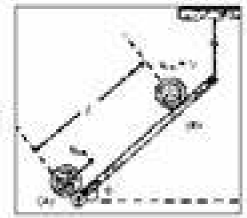
$$\frac{\Delta p}{\Delta t}=\Sigma F=m_1a_{cm} \rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t}=8N$$

**2.α.** Επειδή κατά την αλλαγή διεύθυνσης κίνησης του κυλίνδρου η κινητική του ενέργεια δεν μεταβάλλεται, εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ μέχρι τη θέση (Β) όπου ο κύλινδρος σταματάει παίρνουμε:



ΘΜΚΕ (Α)→(Β):
$K^{(B)}-K^{(A)}=\Sigma W \rightarrow 0-K=-m_1g\,ημφ\,\chi \rightarrow$
$\rightarrow 96=10\chi \rightarrow \mathbf{\chi=9,6m}$.

Όταν ο κύλινδρος έχει σταματήσει στιγμιαία στη θέση (Β) από τη συνθήκη ισορροπίας για τη δοκό παίρνουμε:



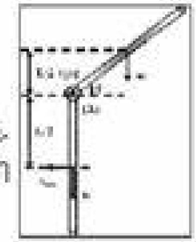
$\Sigma\tau_{(A)}=0 \rightarrow$

$$FLσυνφ-w_1\chi\,συνφ-w\frac{L}{2}συνφ=0 \rightarrow$$

$$FL=w_1\chi+w\frac{L}{2} \rightarrow 10F=192+200 \rightarrow \mathbf{F=39,2N}$$

Επειδή η τάση του νήματος F έχει μέτρο μεγαλύτερο από το όριο θραύσεως του νήματος $T_{θρ}=30N$ το νήμα τελικά θα σπάσει.

**3. α.** Η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της (Α) είναι:



$$I=I_{cm}+m\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{12}mL^2+m\frac{L^2}{4}=\frac{1}{3}mL^2.$$

Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ για τη δοκό από τη θέση που σπάει το νήμα ως την κατακόρυφη θέση:

$$K_{(τελ)}-K_{(αρχ)}=W_w \rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2=mg\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}ημ30°\right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{3}mL^2\omega^2=2mg\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{4}\right) \rightarrow \omega^2=6g\frac{3}{4L} \rightarrow \mathbf{\omega=\frac{3\sqrt{2}}{2}rad/s}$$

$$u_{cm}=\omega\frac{L}{2} \rightarrow \mathbf{u_{cm}=\frac{15\sqrt{2}}{2}m/s}$$

**β.** Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της δοκού στην κατακόρυφη θέση είναι:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=\Sigma\tau_{(A)} \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t}=\tau_w=0$$

αφού ο φορέας του βάρους διέρχεται από τον άξονα περιστροφής.