ΖΗΤΗΜΑ 2ο

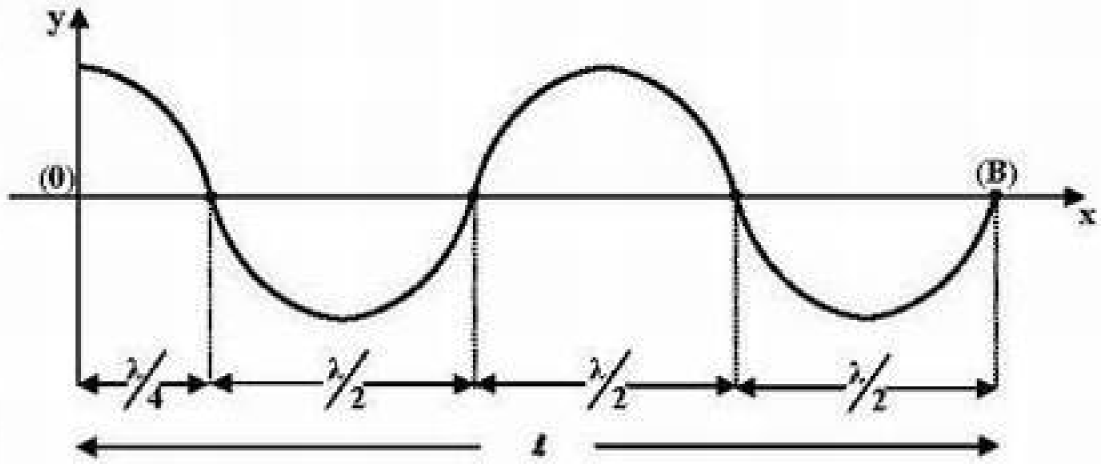
Σε χορδή μήκους $\ell = 5{,}25cm$ έχουμε ακλόνητα στερεωμένο το δεξιό άκρο της (Β). Πάνω στη χορδή δημιουργείται στάσιμο κύμα συχνότητας $f = 25Hz$, με τέσσερα σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα. Στο αριστερό άκρο της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ έχουμε μια κοιλία του κύματος που κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνσή του είναι $y = 0$ και η φορά της κίνησής του θετική. Δίνεται ότι ένα σημείο της χορδής που ταυτίζεται με κοιλία του στάσιμου κύματος έχει ταχύτητα μέτρου $300\pi \, cm/s$ όταν η απομάκρυνσή του είναι 8cm.

α. Να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}07s$ να βρεθεί η επιτάχυνση που έχει ένα σημείο της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = 1{,}5cm$.

γ. Να βρεθεί το κοντινότερο από τα δεξιά στον πρώτο δεσμό σημείο της χορδής που έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης τη μισή από την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης μιας κοιλίας.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο



α. Η απόσταση μιας κοιλίας και του γειτονικότερου σε αυτή δεσμού είναι $\lambda/4$.

Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\lambda/2$.

Άρα από το διπλανό στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος συμπεραίνουμε ότι:

$$\ell = \frac{\lambda}{4} + 3\cdot\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \ell = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4\ell}{7} \Rightarrow \lambda = 3cm.$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την ταλάντωση ενός σημείου που ταυτίζεται με κοιλία του στάσιμου κύματος έχουμε:

$$K + U = E_{ΟΛ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_y^2 + \frac{1}{2}D\cdot y^2 = \frac{1}{2}D\cdot A_{ΚΟΙΛ}^2 \Rightarrow m\cdot\upsilon_y^2 + m\omega^2\cdot y^2 = m\omega^2\cdot A_{ΚΟΙΛ}^2 \Rightarrow A_{ΚΟΙΛ} = \sqrt{\frac{\upsilon_y^2}{\omega^2} + y^2} \Rightarrow$$

$A_{ΚΟΙΛ} = \sqrt{\left(\frac{\upsilon_y}{2\pi f}\right)^2 + y^2} \Rightarrow A_{ΚΟΙΛ} = 10cm.$ Είναι $A_{ΚΟΙΛ} = 2A$ όπου Α είναι το πλάτος των αρμονικών κυμάτων από τη συμβολή των οποίων προέκυψε το στάσιμο κύμα. Οπότε η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\cdot συν\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cdot ημ\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \Rightarrow \boxed{y = 10\cdot συν\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\cdot ημ(50\pi t)} \begin{pmatrix} x, y & σε & cm \\ t & σε & s \end{pmatrix}$$

β. Για το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 1{,}5cm$ η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $y = 10\cdot συν(\pi)\cdot ημ(50\pi t)$ (S.I.) $\Rightarrow y = -10\cdot ημ(50\pi t)$. (S.I.) $\Rightarrow y = 10\cdot ημ(50\pi t + \pi)$ (S.I.)

Η μέγιστη επιτάχυνσή του είναι: $\alpha_{y,max} = \omega^2\cdot A_{ΣΗΜ} \Rightarrow \alpha_{y,max} = 25000\pi^2 \, cm/s^2$. Άρα η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι: $\alpha_y = -25000\pi^2\cdot ημ(50\pi t + \pi)$ (S.I.). Για $t = 0{,}07s$ έχουμε $\boxed{\alpha_y = -25000\pi^2 \, cm/s^2}$

γ. Ο πρώτος δεσμός βρίσκεται στη θέση $x_\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \overset{k=0}{\Rightarrow} x_{\Delta,1} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_{\Delta,1} = 0{,}75cm.$ Βρίσκουμε σημεία για τα οποία ισχύει

$$\upsilon_{y,max,ΣΗΜ} = \frac{\upsilon_{y,max,ΚΟΙΛΙΑΣ}}{2} \Rightarrow \omega\cdot A_{ΣΗΜ} = \frac{\omega\cdot A_{ΚΟΙΛ}}{2} \Rightarrow \left|10\cdot συν\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right| = 5 \Rightarrow συν\left(\frac{2\pi x}{3}\right) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$x = 0{,}5cm,\ 1cm,\ 2cm,\ 2{,}5cm, \ldots\ldots$

Άρα το κοντινότερο στον πρώτο δεσμό σημείο από τα δεξιά είναι το σημείο στη θέση $\boxed{x = 1cm}$

δ. Αφού η χορδή είναι η ίδια (ίδιο υλικό), η ταχύτητα διάδοσης των αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα μένει σταθερή. $\upsilon' = \upsilon = \lambda\cdot f = 75 \, cm/s$. Άρα $\lambda' = \frac{\upsilon'}{f'} \Rightarrow \lambda' = 2{,}5cm$.

Το άκρο (Β) της χορδής με $x = 5{,}25cm$ πρέπει να είναι δεσμός και στο καινούργιο στάσιμο κύμα. Από τη σχέση που δίνει τις θέσεις των δεσμών έχουμε: $x'_{ΔΕΣΜΩΝ} = (2k+1)\frac{\lambda'}{4} \Rightarrow 5{,}25 = (2k+1)\frac{2{,}5}{4} \Rightarrow k = 3{,}7.$ Άτοπο αφού το k πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός.