- ΑΣΚΗΣΗ 1

Λύση

α) Η γενική εξίσωση του αρμονικού κύματος είναι . Συγκρίνοντάς την με μία από τις δύο εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων, έστω την εξίσωση $y_1 = 10\eta\mu 2\pi(5t - x)$, προκύπτει:

$5t = \frac{t}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{5}s$ και $\frac{x}{\lambda} = x \Rightarrow \lambda = 1cm$

Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1cm}{\frac{1}{5}s} \Rightarrow v = 5\frac{cm}{s}$$

β) Η γενική εξίσωση του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Με αντικατάσταση των τιμών των Α, λ και Τ προκύπτει: $y = 20\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\cdot\eta\mu(10\pi t)$, όπου y και x είναι μετρημένα σε cm και το t σε s. Άρα το πλάτος ταλάντωσης συναρτήσει της απόστασης είναι:

$$A' = 20\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi x\right|(cm)$$

γ) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του στάσιμου τις τιμές του x των τριών σημείων.

Για το υλικό σημείο Α:

$$y_A = 20\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi\frac{x_A}{\lambda})\cdot(10\pi t)\,(cm,s) \Rightarrow y_A = 20\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(10\pi t)\,(cm,s) \Rightarrow$$

$$y_A = 20\cdot 0\cdot(10\pi t)\,(cm,s) \Rightarrow y_A = 0cm$$

Το σημείο Α παραμένει ακίνητο, άρα είναι δεσμός.

Για το υλικό σημείο Β:

$$y_B = 20\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi\frac{x_B}{\lambda})\cdot\eta\mu(10\pi t)\,(cm,s) = 20\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi)\cdot\eta\mu(10\pi t)\,(cm,s)$$

, δηλαδή

$y_B = -20\cdot\eta\mu 10\pi t(cm,s)$.Άρα το υλικό σημείο Β πάλλεται με μέγιστο πλάτος, επομένως είναι κοιλία.

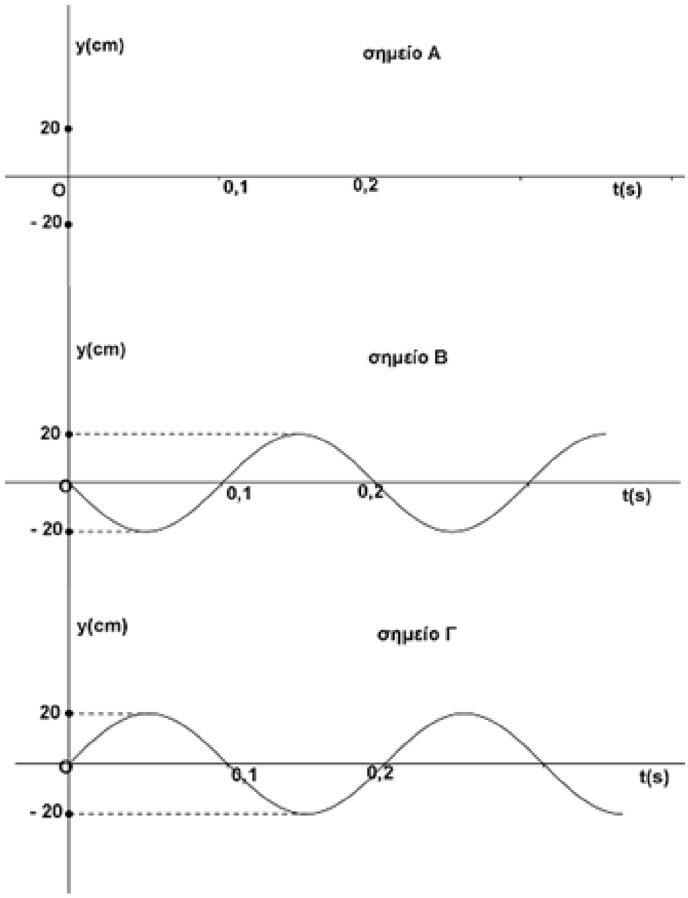
Για το υλικό σημείο Γ:

$$y_\Gamma = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi \frac{x_\Gamma}{\lambda}) \cdot \eta\mu(10\pi t)\,(cm, s) \Rightarrow y_\Gamma = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi) \cdot \eta\mu(10\pi t)\,(cm, s)$$

δηλαδή $y_\Gamma = 20 \cdot \eta\mu 10\pi t\,(cm, s)$.

Άρα και το υλικό σημείο Γ πάλλεται με μέγιστο πλάτος, επομένως είναι κοιλία.

Σχόλιο: Το αρνητικό πρόσημο στην εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Β σημαίνει ότι το Β βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του όταν το σημείο Γ βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση. Λέμε ότι τα δύο σημεία ταλαντώνονται με διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi$. Οι γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης χρόνου φαίνονται στα διαγράμματα που ακολουθούν.



δ) Το τυχαίο υλικό σημείο της χορδής ταλαντώνεται με βάση την εξίσωση

$y = A'\eta\mu(10\pi t)\,(cm, s)$, όπου $A' = 20\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\,(cm)$.

Η μέγιστη ταχύτητα με την οποία ταλαντώνεται κάθε υλικό σημείο θα είναι:

$$v_{\max} = \omega\left|A'\right| = 200\pi \cdot \left|\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\right| (cm/s)$$

Επειδή $0 \leq \left|\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\right| \leq 1$, το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των υλικών σημείων κυμαίνεται μεταξύ της ελάχιστης τιμής $v = 0$ και της μέγιστης $v_{\max} = 200\pi \dfrac{cm}{s}$.

ε) Τα σημεία που παραμένουν ακίνητα απέχουν από το ελεύθερο άκρο της χορδής, $x = \dfrac{(2K+1)\,\lambda}{4} = \dfrac{(2K+1)}{4} cm$, όπου $K = 0, 1, 2, 3$

Για τα σημεία που πάλλονται με μέγιστο πλάτος ισχύει: $x = \dfrac{K\lambda}{2} = \left(\dfrac{K}{2}\right) cm$, όπου $K = 0, 1, 2, 3...$

- ΑΣΚΗΣΗ 2

Λύση

α) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα βρεθεί από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $v = \lambda \mathrm{f}$.

Συγκρίνοντας την εξίσωση $y = 0,1\eta\mu(4\pi t - \dfrac{\pi x}{2})$ με τη γενική εξίσωση των κυμάτων, $y = A\eta\mu 2\pi(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda})$ έχουμε ότι:

$$4\pi t = \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow T = 0,5s \Rightarrow f = 2Hz$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4m$$

Συνεπώς $v = \lambda f = 8m/s$

β) Όπως φαίνεται από τη σχέση που δίνει τη φάση του κύματος $\phi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$, όσο πιο μακριά είναι ένα σημείο από την πηγή τόσο μικρότερη είναι η φάση του.

Η φάση του σημείου Μ, $\left(\phi_M = \frac{10\pi}{3} rad = \frac{20\pi}{6} rad\right)$, είναι μεγαλύτερη από τη φάση του σημείου Ν, $\left(\phi_N = \frac{17\pi}{6} rad\right)$. Συνεπώς πιο κοντά στην πηγή είναι το σημείο Μ.

Ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ των σημείων Μ και Ν γίνεται με αφαίρεση των δύο φάσεων.

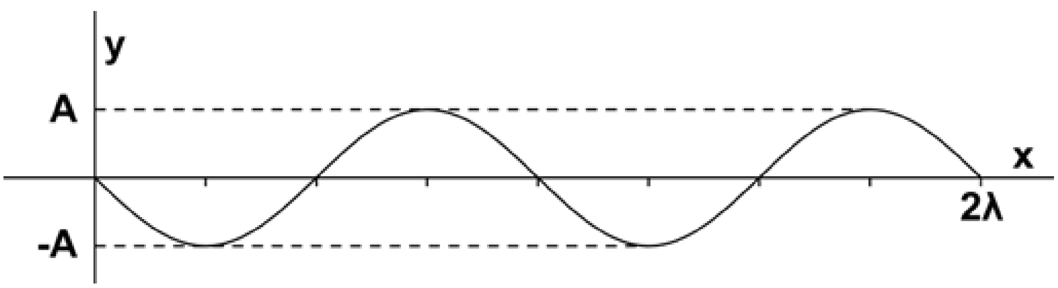
$$\phi_M - \phi_N = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda}\right) \Rightarrow \phi_M - \phi_N = 2\pi\frac{(x_N - x_M)}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{20\pi}{6} - \frac{17\pi}{6} = 2\pi\frac{(x_N - x_M)}{\lambda} \Rightarrow \frac{3\pi}{6} = 2\pi\frac{(x_N - x_M)}{4m} \Rightarrow (x_N - x_M) = 1m$$

γ) Υπολογίζουμε σε πόση απόσταση θα έχει διαδοθεί το κύμα σε χρονικό διάστημα 1s. Σε χρόνο $t = 1s = 2T$, το κύμα θα έχει διαδοθεί απόσταση ίση με δύο μήκη κύματος (2λ)

Βρίσκουμε την κίνηση χαρακτηριστικών υλικών σημείων.

Τα υλικά σημεία στις θέσεις x=0 , x=λ και $x = 2\lambda$, θα βρίσκονται σε απομάκρυνση y=0 και είναι έτοιμα να κινηθούν κατά τη θετική φορά.



δ) Επειδή τα σημεία Μ, Ν, απέχουν μεταξύ τους 1m= $\frac{\lambda}{4}$, παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$, με το σημείο Μ να προηγείται. Έτσι, όταν το Μ είναι στη θέση μέγιστης θετικής απομάκρυνσης, τότε το Ν περνά από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

- ΑΣΚΗΣΗ 3

<u>Λύση</u>

α) Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα θα εφαρμόσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

Γράφουμε τη δοθείσα εξίσωση σε μορφή αντίστοιχη της γενικής εξίσωσης του αρμονικού κύματος $y = A\eta\mu 2\pi(f \cdot t - \frac{x}{\lambda})$

Έχουμε $y = 8\eta\mu(10\pi t - \frac{2\pi x}{5}) \Rightarrow y = 8\eta\mu 2\pi(5t - \frac{x}{5})(cm, s)$

Από τη σύγκριση των δύο εξισώσεων παίρνουμε:

$2\pi f = 10\pi$, συνεπώς $f = 5Hz$ και $\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{\lambda}$, συνεπώς $\lambda = 5cm$

Άρα $v = \lambda f = 25\frac{cm}{s}$

β) Το σημείο ανάκλασης είναι ακλόνητο , άρα σε αυτό δημιουργείται δεσμός. Στο ελεύθερο άκρο δημιουργείται κοιλία. Επειδή σε ένα στάσιμο, ο δεσμός από την κοιλία απέχουν $\frac{\lambda}{4}$ το μήκος της χορδής L συνδέεται με το μήκος κύματος λ με τη σχέση: $L = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

Με αντικατάσταση του L και του λ προκύπτει ότι $\kappa = 6$. Συνεπώς μεταξύ πρώτου και τελευταίου δεσμού οι κοιλίες είναι 6 και δεδομένου ότι στη θέση $x = 0$ υπάρχει κοιλία στο σύνολο δημιουργούνται 7 κοιλίες.

γ) Η απομάκρυνση των υλικών σημείων του μέσου σε ένα στάσιμο δίνονται από τη σχέση $y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\omega t$.

Έτσι η κοιλία Κ της θέσης $x = \frac{\lambda}{2}$ θα ταλαντώνεται σύμφωνα με τη σχέση $y_K = 2 \cdot 8\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{2\pi\lambda}{2}}{\lambda} \cdot \eta\mu 10\pi t \Rightarrow y_K = -16 \cdot \eta\mu 10\pi t (cm, s)$

και η ταχύτητα ταλάντωσής της θα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_K = 10\pi(-16) \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi t)(cm/s) \Rightarrow \upsilon_K = -160\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi t)(cm/s)$$

δ) Το πλάτος συναρτήσει της απόστασης από τη θέση $x = 0$, δίνεται από τη σχέση:

$A' = 2A\left|\frac{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}{\lambda}\right|$ συνεπώς $8\sqrt{3} = 16\left|\frac{\sigma\upsilon\nu 2\pi x}{5}\right|$ δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{5}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα $\frac{2\pi x}{5} = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{2\pi x}{5} = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, οπότε $x = \frac{5\kappa}{2} \pm \frac{5}{12}cm$, όπου x η απόσταση από το ελεύθερο άκρο της χορδής που πάλλεται με μέγιστο πλάτος (κοιλία).

Οι κοιλίες απέχουν από το ελεύθερο άκρο απόσταση $x_\kappa = \frac{\kappa\lambda}{2} = \frac{5\kappa}{2}(cm)$

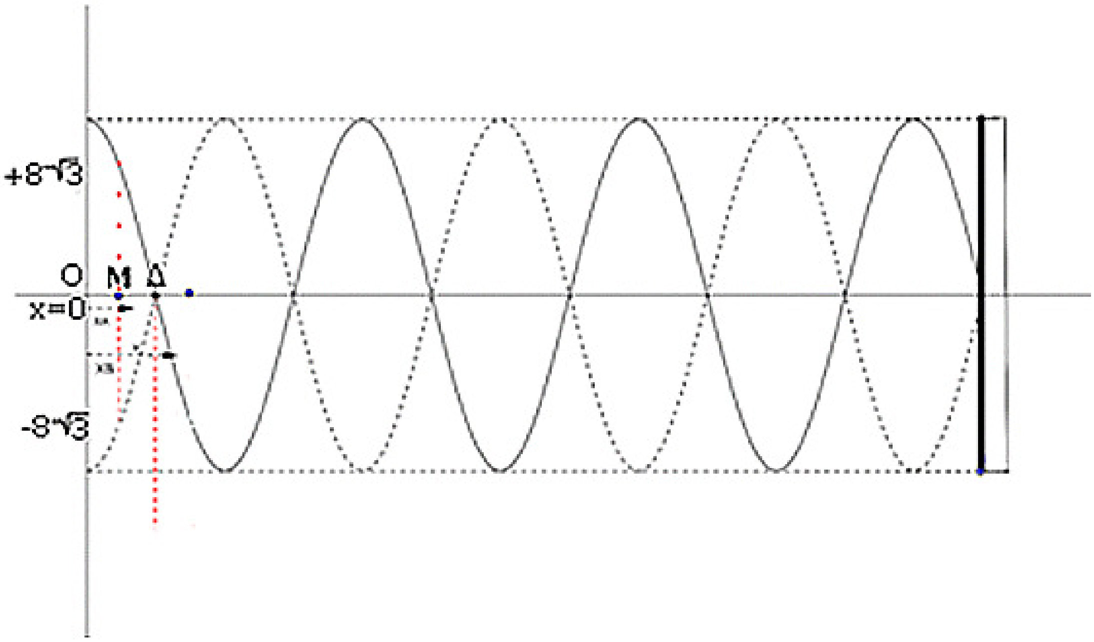
Συνεπώς κάθε σημείο που πάλλεται με πλάτος $8\sqrt{3}cm$, θα απέχει από την πλησιέστερη κοιλία απόσταση $d_1 = \frac{5}{12}cm$.

Οι δεσμοί απέχουν από το ελεύθερο άκρο απόσταση

$$x_\Delta = \frac{(2\kappa+1)\lambda}{4} = \frac{5\kappa}{2} + \frac{5}{4}(cm).$$

Συνεπώς κάθε σημείο που πάλλεται με πλάτος $8\sqrt{3}cm$, θα απέχει από τον πλησιέστερο δεσμό απόσταση d_2 για την οποία ισχύει:

$$d_1 + d_2 = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow d_2 = \frac{\lambda}{4} - d_1 \Rightarrow d_2 = \frac{5}{4}cm - \frac{5}{12}cm \Rightarrow d_2 = \frac{10}{12}cm$$

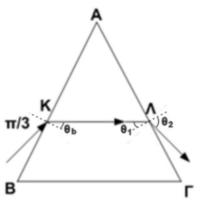


- ΑΣΚΗΣΗ 4

Λύση

α) Ο υπολογισμός του δείκτη διάθλασης, n_b γίνεται με βάση το νόμο του Snell, αρκεί πρώτα να υπολογίσουμε τη γωνία διάθλασης θ_b.

Επειδή η διαθλώμενη ακτίνα ΚΛ είναι παράλληλη στη πλευρά ΒΓ, η γωνία διάθλασης θ_b μέσα στο πρίσμα θα είναι $\theta_b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.



(Το τρίγωνο ΑΚΛ θα είναι επίσης ισόπλευρο)

Με εφαρμογή του νόμου του Snell στο σημείο Κ που συμβαίνει το φαινόμενο της διάθλασης παίρνουμε:

$$n_b \cdot \eta\mu\theta_b = n_a \cdot \eta\mu\theta_a \Rightarrow n_b = \frac{n_a \cdot \eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} \Rightarrow n_b = \frac{1 \cdot \eta\mu\frac{\pi}{3}}{\eta\mu\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow n_b = \sqrt{3}$$

β) Από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης έχουμε:

$$n_b = \frac{c}{\upsilon_b} \Rightarrow \upsilon_b = \frac{c}{n_b} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{\sqrt{3}} \Rightarrow \upsilon_b = \sqrt{3} \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Συνεπώς από τη σχέση $\upsilon = \lambda \mathrm{f}$ προκύπτει ότι:

$$\lambda_b = \frac{\upsilon_b}{f} = \frac{\sqrt{3} \cdot 10^8 m/s}{5 \cdot 10^{14} s^{-1}} \Rightarrow \lambda_b = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-7} m$$

γ) Εφαρμόζουμε το νόμο του Snell στο σημείο Λ που συμβαίνει εκ νέου διάθλαση της ακτίνας, καθώς η ακτίνα εξέρχεται από το πρίσμα.

Η νέα γωνία πρόσπτωσης είναι $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$. Με εφαρμογή του νόμου του Snell για τη νέα γωνία διάθλασης θ_2 παίρνουμε:

$$n_a \cdot \eta\mu\theta_2 = n_b \cdot \eta\mu\theta_1 \Rightarrow \eta\mu\theta_2 = \frac{n_b \cdot \eta\mu\theta_1}{n_a} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1/2}{1} \Rightarrow \eta\mu\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

- ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Με βάση τη σχέση: $\upsilon = \frac{\lambda}{T}$ βρίσκουμε ότι:

$$T = \frac{\lambda}{\upsilon} = \frac{1m}{100m/s} \Rightarrow T = 10^{-2} s$$

.

β) Η γενική εξίσωση κύματος είναι: $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

Η συχνότητα είναι $f = 100Hz$, άρα $\omega = 2\pi f = 200\pi \frac{rad}{s}$, και $\lambda = 1m$.

Η εξίσωση του αρμονικού κύματος προκύπτει με αντικατάσταση και είναι:

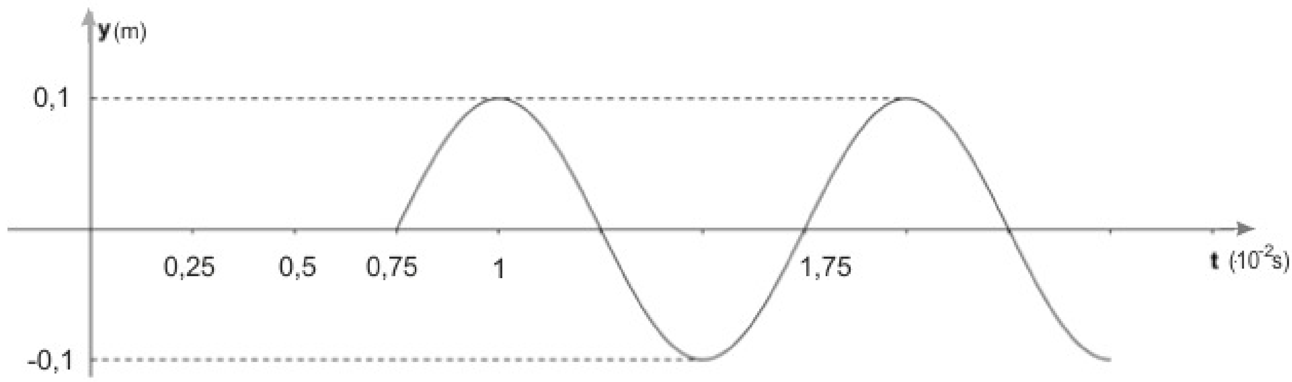
$y = 0,1\eta\mu 2\pi(100t - x)\ (S.I.)$

το οποίο βρίσκεται στη θέση $x = \frac{3\lambda}{4}$.

Η απομάκρυνση του υλικού σημείου Α, που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{3\lambda}{4} = \frac{3}{4}m$, θα δίνεται από τη σχέση $y_A = 0,1\eta\mu 2\pi(100t - \frac{3}{4})\ (S.I.)$

Για να φθάσει το κύμα στο σημείο Α, που απέχει από τη πηγή $\frac{3\lambda}{4}$ χρειάζεται χρόνο ίσο με $t_1 = \frac{x}{\upsilon} = \frac{0,75m}{100m/s} \Rightarrow t_1 = 0,75 \cdot 10^{-2}s$. Άρα για $t < t_1$ το σημείο Α είναι ακίνητο. Έτσι η παραπάνω εξίσωση

ισχύει για $t \geq t_1$ ή $t \geq 0,75 \cdot 10^{-2}s$



γ) Η ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια του υλικού σημείου δηλαδή: $E = K_{\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}{}^2$

Όμως, $v_{max} = \omega A = 200 = 200\pi \frac{rad}{s} \cdot 0,1m \Rightarrow v_{max} = 20\pi \frac{m}{s}$

Με αντικατάσταση παίρνουμε $K = 2J$

δ) Από τον τύπο $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ που δίνει τις θέσεις των δεσμών σε ένα στάσιμο, βλέπουμε ότι ο πρώτος δεσμός προκύπτει για $k = 0$, οπότε η θέση του πέμπτου δεσμού θα προκύψει για $k = 4$:

$$x_5 = (2 \cdot 4 + 1)\frac{\lambda}{4} = 9\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_5 = 2,25m$$

- ΑΣΚΗΣΗ 6

Λύση

α) Με αντικατάσταση στη σχέση: $c = \lambda_0 \mathrm{f}$ βρίσκουμε το μήκος κύματος στο κενό, προκύπτει: $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-7} m = 500nm$.

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$c = \frac{E_{\max}}{B_{\max}} \Rightarrow B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = \frac{18 \cdot 10^{-1} \frac{V}{m}}{3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}} \Rightarrow B_{\max} = 6 \cdot 10^{-9} T$$

Συνεπώς οι ζητούμενες εξισώσεις θα είναι:

$$E = E_{\max} \eta\mu 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \Rightarrow E = 18 \cdot 10^{-1} \eta\mu 2\pi (6 \cdot 10^{14} \mathrm{t}\text{-}2 \cdot 10^{6} \mathrm{x})\,(\mathrm{SI})$$

$$B = B_{\max} \eta\mu 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \Rightarrow B = 6 \cdot 10^{-9} \eta\mu 2\pi (6 \cdot 10^{14} \mathrm{t}\text{-}2 \cdot 10^{6} \mathrm{x})(\mathrm{SI})$$

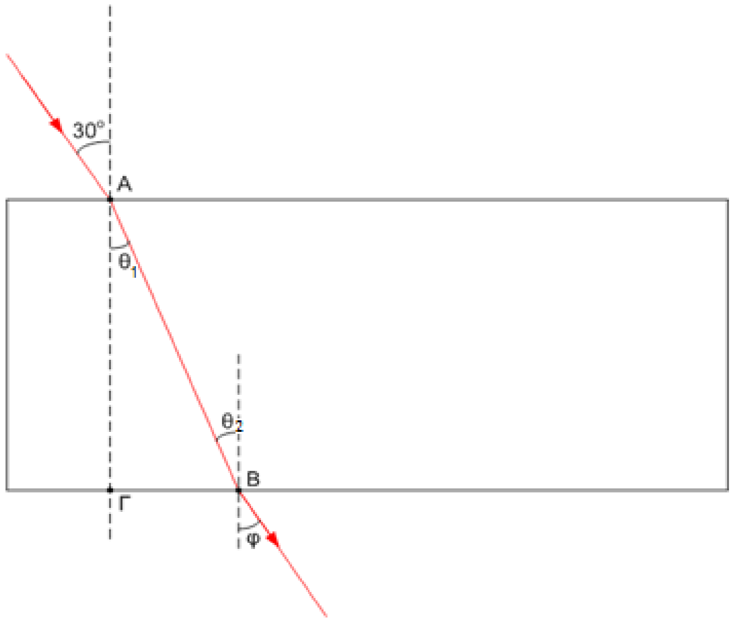
β) $\lambda = \lambda_0 - \frac{20\lambda_0}{100} = 500nm - 100nm = 400nm \Rightarrow \lambda = 4 \cdot 10^{-7} m$

Η ταχύτητα στο πλακίδιο θα είναι:

$$v = \lambda f = (4 \cdot 10^{-7} m) \cdot (6 \cdot 10^{14} Hz) \Rightarrow v = 2,4 \cdot 10^{8} m/s$$

Ο δείκτης διάθλασης θα είναι $n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 10^{-7}} \Rightarrow n = 1,25$

γ) Εφαρμόζουμε το νόμο του Snell στο σημείο εισόδου Α και το σημείο εξόδου Β:



Σημείο Α: $\frac{\eta\mu 30^o}{\eta\mu\theta_1} = \frac{n}{1} \Rightarrow \eta\mu\theta_1 = \frac{\eta\mu 30^o}{n}$

Σημείο Β: $\frac{\eta\mu\theta_2}{\eta\mu\phi} = \frac{1}{n} \Rightarrow \eta\mu\theta_2 = \frac{\eta\mu\phi}{n}$

Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει $\theta_1 = \theta_2$, έτσι στις δύο παραπάνω σχέσεις τα πρώτα μέλη είναι ίσα, οπότε εύκολα παίρνουμε

$\eta\mu\phi = \eta\mu 30^o$, και επειδή οι γωνίες είναι οξείες, προκύπτει ότι $\phi = 30^0$.

δ) Ο ζητούμενος χρόνος είναι $\mathrm{t} = \frac{(AB)}{v}$

Υπολογισμός της διαδρομής (ΑΒ).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{d}{(AB)} \Rightarrow (AB) = \frac{d}{\sigma\upsilon\nu\theta_1}$$. Άρα $$t = \frac{d}{\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_1}$$ (1)

Από το νόμο του Snell για το σημείο εισόδου Α με αντικατάσταση, βρίσκουμε το $\eta\mu\theta_1$.

$$\frac{\eta\mu 30^o}{\eta\mu\theta_1} = \frac{n}{1} \Rightarrow \eta\mu\theta_1 = \frac{\eta\mu 30^o}{n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} \Rightarrow \eta\mu\theta_1 = \frac{4}{10}$$

Από τη σχέση $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, βρίσκουμε το $\sigma\upsilon\nu\theta_1$. Προκύπτει $\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{\sqrt{84}}{10}$. Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει:

$$t = \frac{d}{\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_1} = \frac{2,4 \cdot 10^{-2}\sqrt{28}m}{2,4 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \frac{\sqrt{84}}{10}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-10}s \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 10^{-9}s$$

Άρα ο ζητούμενος χρόνος θα είναι $t = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 10^{-9}s$.

- ΑΣΚΗΣΗ 7

α) Από την εξίσωση $y = 0,05\eta\mu 8\pi t$ (S.I.) βρίσκουμε: $A = 0,05m$, $\omega = 8\pi\ rad/s$. Η περίοδος προκύπτει από τη σχέση $\omega = \frac{2\pi}{T}$, άρα $T = 0,25s$ και συνεπώς η συχνότητα είναι $f = 4Hz$. Ο χρόνος που χρειάζεται ένα υλικό σημείο να κάνει μια πλήρη ταλάντωση, είναι η περίοδος ταλάντωσης του, δηλαδή είναι ίσος με $0,25s$.

Το μήκος κύματος προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής.

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{2m/s}{4Hz} \Rightarrow \lambda = 0,5m$$.

β) Η γενική εξίσωση του κύματος είναι: $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$, η οποία με αντικατάσταση, των μεγεθών A, T και λ γίνεται:

$y = 0,05\eta\mu 2\pi(4t - 2x)\,(SI)$

Τα σημεία που είναι σε συμφωνία φάσης με την πηγή απέχουν από αυτή ακέραιο αριθμό μηκών κύματος, δηλαδή βρίσκονται σε θέσεις για τις οποίες ισχύει $x = k\lambda = k \cdot 0,5m k = 1, 2, 3, \ldots$

γ) Η μέγιστη ταχύτητα θα είναι: $\upsilon_{\max} = \omega A = 0,4\pi\ m/s$, ενώ η εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι:

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Άρα $\upsilon = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(4t - 2x)$ στο (S.I.).

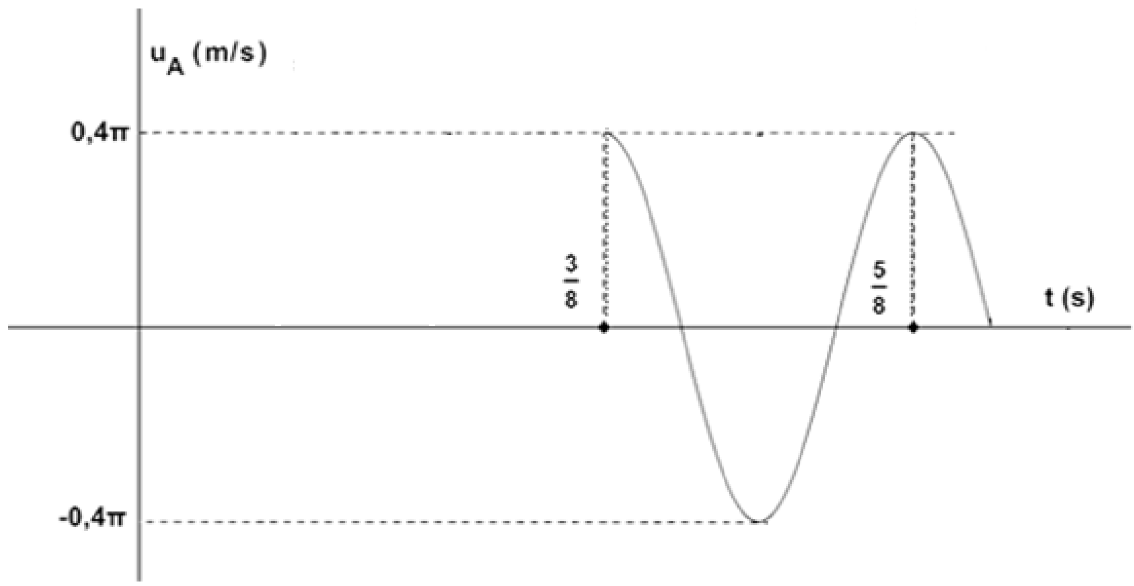
Η γενική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλαντωσης θα είναι: $\upsilon_{max} = \omega A = 0,4\pi\ m/s$

Με αντικατάσταση στη γενική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης: $T = 0,25s$, $\lambda = 0,5m$, $x = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3}{4}m$ παίρνουμε $\upsilon_A = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(4t - \frac{3}{2})\,(SI)$

Το κύμα φθάνει στο Α $(x_A = \frac{3}{4}m)$ τη χρονική στιγμή $t_A = \frac{x_A}{\upsilon} = \frac{3}{8}s$. Για $t < t_A$ το σημείο Α παραμένει ακίνητο. Άρα η εξίσωση ταχύτητας - χρόνου είναι:

$\upsilon_A = 0,4\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(4t - 2x)$ για $t \geq \frac{3}{8}s$ στο S.I.



δ) Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο, βρίσκουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης συναρτήσει της απόστασης και υπολογίζουμε που έχει φθάσει το κύμα την κάθε χρονική στιγμή.

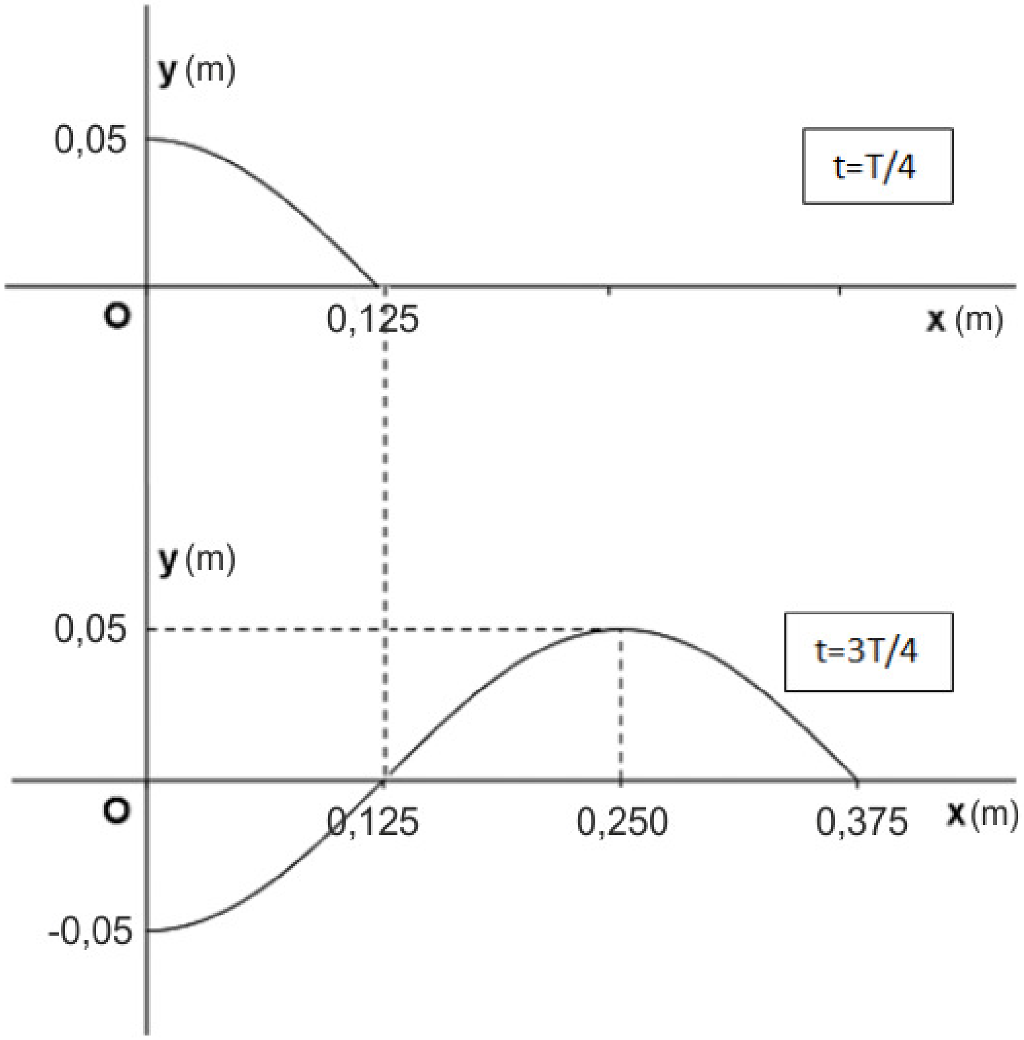
Τη χρονική στιγμή $\frac{T}{4}$, η εξίσωση απομάκρυνσης - θέσης είναι: $y = 0,05\eta\mu 2\pi(\frac{1}{4} - 2x)$.

Τη χρονική στιγμή αυτή το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$x = \upsilon t = \upsilon\frac{T}{4} = \frac{\lambda}{4} = 0,125m$, ενώ τη χρονική στιγμή $\frac{3T}{4}$, η εξίσωση απομάκρυνσης - θέσης, είναι: $y = 0,05\eta\mu 2\pi(\frac{3}{4} - 2x)$.

Τη χρονική στιγμή αυτή το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$x = \upsilon t = \upsilon\frac{3T}{4} = \frac{3\lambda}{4} = 0,375m$.



- ΑΣΚΗΣΗ 8

α) Από το διάγραμμα του στιγμιότυπου φαίνεται ότι το κύμα διαδόθηκε, από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι την t_1, κατά $x = 2,7m$.

Άρα $t_1 = \frac{x}{\upsilon} = \frac{2,7m}{2m/s} \Rightarrow t_1 = 1,35s$

β) Από εκφώνηση η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής είναι $y_\pi = A \cdot \eta\mu\omega t$, οπότε η εξίσωση του (τρέχοντος) κύματος θα είναι της μορφής $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$.

- Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το πλάτος του κύματος είναι $A = 0,2m$.

- Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το κύμα διαδόθηκε, από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι την t_1, κατά $\frac{\lambda}{4} + 2\lambda = 9\frac{\lambda}{4}$, όπου λ το μήκος κύματος.

Άρα $\frac{9}{4}\lambda = 2,7m \Rightarrow \lambda = 1,2m$.

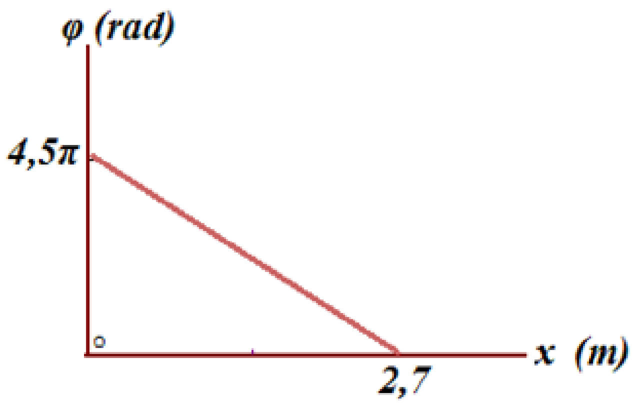
- Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής παίρνουμε

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2m/s}{1,2m} \Rightarrow f = \frac{1}{0,6}s^{-1} \Rightarrow T = 0,6s$$

Οπότε η εξίσωση του κύματος θα έχει την μορφή $y = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{x}{1,2})(SI)$.

γ) Η φάση του κύματος, για την χρονική στιγμή $t_1 = 1,35s$ περιγράφεται από τη συνάρτηση $\phi = 2\pi(\frac{1,35}{0,6} - \frac{x}{1,2}) \Rightarrow \phi = 4,5\pi - \frac{\pi x}{0,6}\,(SI)$ ($0 \leq x \leq 2,7m$)

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



δ) Από την εξίσωση του κύματος, για $x = 3,3m$ και $y = 0,1m$ έχουμε:

$0,1 = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) \Rightarrow \eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = \frac{1}{2}$ οπότε:

$2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

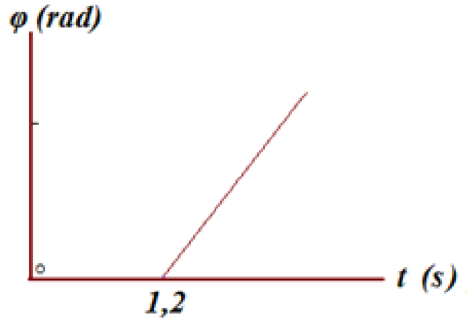
Αφού, για το σημείο Μ, αυτό συμβαίνει για πρώτη φορά, δεκτή γίνεται η πρώτη λύση και με $k = 0$

. Δηλαδή $2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{3,3}{1,2}) = \frac{\pi}{6}$ από την οποία προκύπτει $t = 1,7s$.

ε) Για το σημείο Ν $(x_N = 2,4m)$ η φάση θα δίνεται από τη σχέση:

$\phi_N = 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{2,4}{1,2}) = 2\pi(\frac{t}{0,6} - 2)$, με $t \geq \frac{x}{\upsilon} = \frac{2,4}{2}s \Rightarrow t \geq 1,2s$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



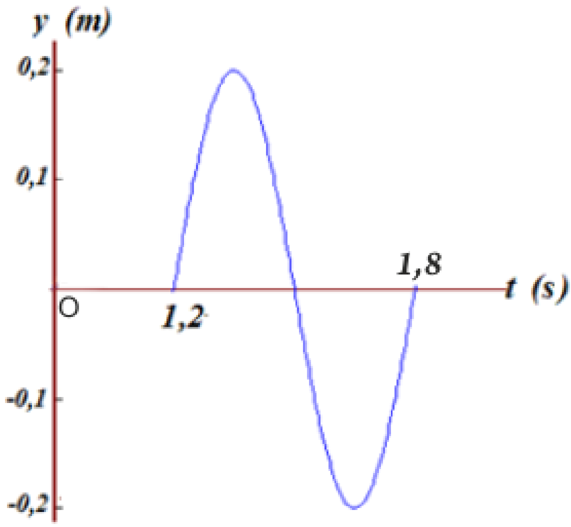
Για το Ν $(x = 2,4m)$

Η εξίσωση της ταλάντωσης του σημείου Ν θα είναι:

$$y_N = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - \frac{2,4}{1,2}) = 0,2\eta\mu 2\pi(\frac{t}{0,6} - 2)\,(SI)$$

με $t \geq \frac{x}{\upsilon} = \frac{2,4}{2}\mathrm{s} \Rightarrow t \geq 1,2s$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



- ΑΣΚΗΣΗ 9

<u>Λύση</u>

Από τα διαγράμματα προκύπτουν τα παρακάτω:

Στο σχήμα 1, παρατηρούμε ότι την χρονική στιγμή t' το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση $x = 5cm$ (1).

Από το ίδιο σχήμα επίσης προκύπτει ότι η απόσταση αυτή αντιστοιχεί σε $x = \frac{5\lambda}{2}$ (2)

Εξισώνοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\lambda = 2\mathrm{cm}$.

Στο σχήμα 2 παρατηρούμε ότι η περίοδος ταλάντωσης του υλικού σημείου Σ είναι $T = 1s$, άρα και η συχνότητα θα είναι $f = 1Hz$.

Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι: $v = \lambda f = 2\ \mathrm{cm/s}$.

Επίσης παρατηρούμε ότι το κύμα για να φτάσει στο υλικό σημείο Σ έκανε χρόνο $t_1 = 1s$. Ο χρόνος αυτός είναι ίσος με την περίοδο του κύματος $(T = 1s)$, άρα η απόσταση πηγής και σημείου Σ είναι ίση με ένα μήκος κύματος και η διαφορά φάσης μεταξύ της πηγής Ο και του σημείου Σ είναι 2π, δηλαδή $\varphi_{\mathrm{O}} - \varphi_{\Sigma} = 2\pi$.

β) Τη χρονική στιγμή t' το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση

$x = 5cm$ με ταχύτητα $v = 2cm/s$. Άρα $t' = \frac{x}{v} = \frac{5cm}{2cm/s} \Rightarrow t' = \frac{5}{2}s$.

γ) Η πηγή τη χρονική στιγμή t' έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα $\Delta\mathrm{t} = \frac{5}{2}s = 2T + \frac{T}{2}$. Άρα περνά από τη θέση ισορροπίας της κινούμενη κατά την αρνητική φορά.

Το υλικό σημείο Σ, ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = 1s$. Τη χρονική στιγμή t' έχει ταλαντωθεί για χρόνο: $\Delta t = t' - t_1 = \frac{5}{2}s - 1s = \frac{3}{2}s = T + \frac{T}{2}$.

Άρα το υλικό σημείο Σ τη χρονική στιγμή αυτή έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση και μισή δηλαδή περνά από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο και αυτό κατά την αρνητική φορά. Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα δύο σημεία παρουσιάζουν διαφορά φάσης 2π.

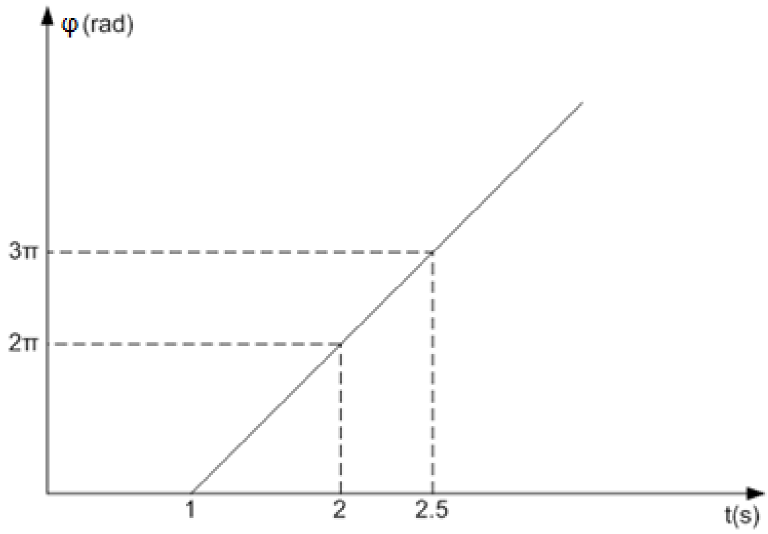
δ) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{\max} = \omega A = 2\pi f \cdot A \Rightarrow \upsilon_{\max} = 2\pi \cdot 1Hz \cdot 4cm \Rightarrow \upsilon_{\max} = 8\pi \frac{cm}{s}$$

Η μέγιστη επιτάχυνση στη ταλάντωση δίνεται από τη σχέση $\alpha_{\max} = \omega^2 A = 160 \frac{cm}{s^2}$

ε) Η φάση του κύματος δίνεται από τη σχέση $\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$. Για το υλικό σημείο Σ $(x = \lambda)$ θα ισχύει $\varphi = 2\pi(t-1)$. Η φάση έχει νόημα για $t \geq 1s$.

Διάγραμμα φάσης - χρόνου για το υλικό σημείο Σ:



- ΑΣΚΗΣΗ 10

α) Συγκρίνοντας την εξίσωση του συγκεκριμένου κύματος

$y = 4 \cdot 10^{-2} \eta\mu \left[(200\pi t) - \frac{10\pi x}{17} \right]$ με τη γενική εξίσωση του κύματος έχουμε:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{10\pi x}{17} \Rightarrow \lambda = \frac{17}{5} m \Rightarrow \lambda = 3,4m$$

$$2\pi f t = 200\pi t \Rightarrow f = 100Hz$$

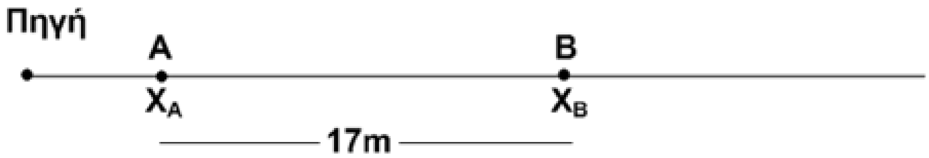
Με αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$v = \lambda f \Rightarrow v = 340\frac{m}{s}$$

β) Οι φάσεις των υλικών σημείων Α και Β, δίνονται από τις σχέσεις: $\varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right)$ και $\varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$, αντίστοιχα. Αφαιρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις βρίσκουμε τη διαφορά φάσης των δύο αυτών σημείων:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{2\pi(x_B - x_A)}{\lambda} = \frac{2\pi(17m)}{3,4m} \Rightarrow \varphi_A - \varphi_B = 10\pi\ rad$$

Άρα η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο σημείων είναι ανεξάρτητη του χρόνου.
Επειδή $\varphi_A - \varphi_B = 10\pi\ rad = 5 \cdot 2\pi\ rad$ (ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π) ή $\Delta x = 5\lambda$ (ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος) τα σημεία αυτά βρίσκονται σε συμφωνία φάσης μεταξύ τους.



γ) Το κύμα φτάνει στο σημείο Α τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{x_A}{v} = \frac{6,8m}{340m/s} = \frac{2 \cdot 3,4m}{3,4 \cdot 100m/s} \Rightarrow t_1 = \frac{2}{100}s = 2T$$

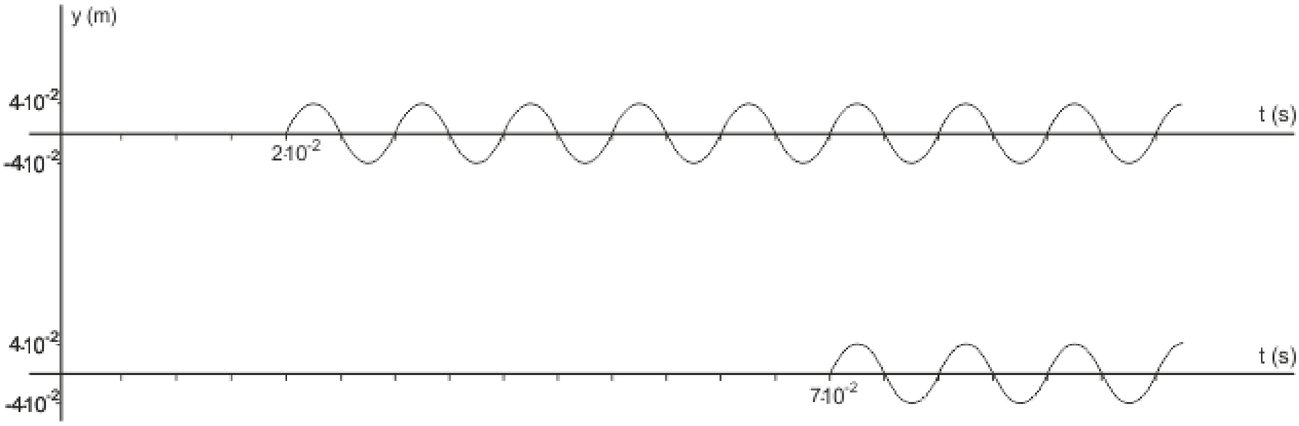
, ενώ το σημείο Β αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{x_B}{v} = \frac{17 + 6,8m}{340m/s} = \frac{7 \cdot 3,4m}{3,4 \cdot 100m/s} \Rightarrow t_2 = \frac{7}{100}s = 7T$$

Και τα δύο σημεία εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση ταλάντωσης

$y_A = 4 \cdot 10^{-2}\eta\mu[(200\pi t) - 4\pi]$, όπου $t \geq \frac{2}{100}s$ και

$y_B = 4 \cdot 10^{-2}\eta\mu[(200\pi t) - 14\pi]$, όπου $t \geq \frac{7}{100}s$, αντίστοιχα.



δ) $\Delta\varphi_A = 2\pi \cdot f \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\varphi_A = 200\pi\ rad$

ε) Το σημείο Β βρίσκεται στη θέση $x_B = 6,8m + 17m = 23,8m$ και απέχει από το σημείο Γ

$$x_B - x_\Gamma = 23,8m - 3,4m \Rightarrow x_B - x_\Gamma = 20,4m \Rightarrow x_B - x_\Gamma = 6 \cdot 3,4m \Rightarrow$$

$$x_B - x_\Gamma = 6\lambda$$

Τα δύο σημεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης και έχουν κάθε στιγμή ίδια απομάκρυνση και ίδια ταχύτητα, άρα η απομάκρυνση του σημείου Γ είναι $y_\Gamma = 2,2cm$.